Variables aléatoires et loi binomiale - Classe de TES

Document réalisé par S. Bignon

I - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définitions :

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire, on appelle variable aléatoire X toute fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si x_1, x_2, ... ,x_n désignent les valeurs prises par X, on note $(X = x_i)$ l'évènement « X prend la valeur x_i ».

On appelle alors loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui, à chaque x_i associe la probabilité $p_i = p(X = x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition :

Si X est une variable aléatoire définie sur un ensemble Ω prenant les valeurs x_1, x_2, ... ,x_n et dont la loi de probabilité est donnée par les probabilités $p_i = p(X = x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on appelle espérance mathématique de X le nombre :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Exemple : Considérons une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules rouges. Si le candidat à un jeu tire une boule verte, il gagne 2 euros, si il tire une boule rouge, il perd 1 euro.

Soit $\Omega = \{V; R\}$ et X la variable aléatoire qui associe le gain au tirage, sa loi de probabilité est :

$p(X = 2) = \dfrac{2}{5}$ et $p(X = -1) = \dfrac{3}{5}$

et son espérance mathématique est : $E(X) = 2 \times \dfrac{2}{5} + (-1) \times \dfrac{3}{5} = 0{,}2$ c'est à dire qu'en jouant un très grand nombre de fois, le candidat pourra espérer gagner, en moyenne, 20 centimes par partie.

II - Loi binomiale

Définitions :
On appelle épreuve de Bernouilli de paramètre p $(0 < p < 1)$, une expérience aléatoire ayant deux issues :

- l'une appellée « succès » (notée S) de probabilité p
- l'autre appellée « échec » (notée $\overline{S}$) de probabilité $1-p$

Lors de la répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes la variable aléatoire X indiquant le nombre de succès lors des n épreuves suit une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.

Propriété : Dans ce cas, on a :

- $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in 0;1;2.....n$
- $E(X) = np$.

Exemple : La probabilité de tirer une carte de cœur dans un jeu de cartes est de $\frac{1}{4}$. Si on effectue 5 tirages en remettant à chaque fois la carte tirée dans le jeu et X la variable aléatoire égale au nombre de cartes de coeur tirées, la probabilité de tirer 3 cœurs est donc de :

$$p(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0.087$$