Convexité - Classe de TES

Document réalisé par S. Bignon

I - Fonctions convexes et concaves

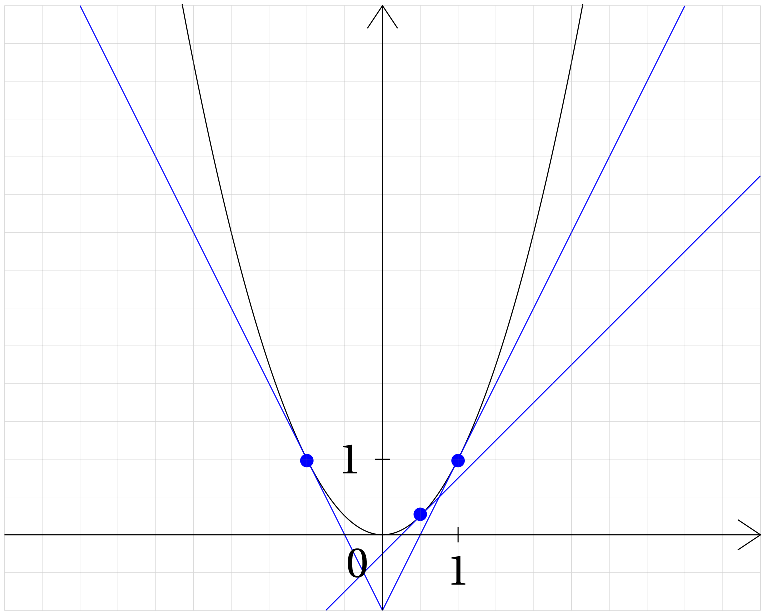
1) Définitions

Définition :
Considérons une fonction f dérivable sur un intervalle I et notons $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On dira que :

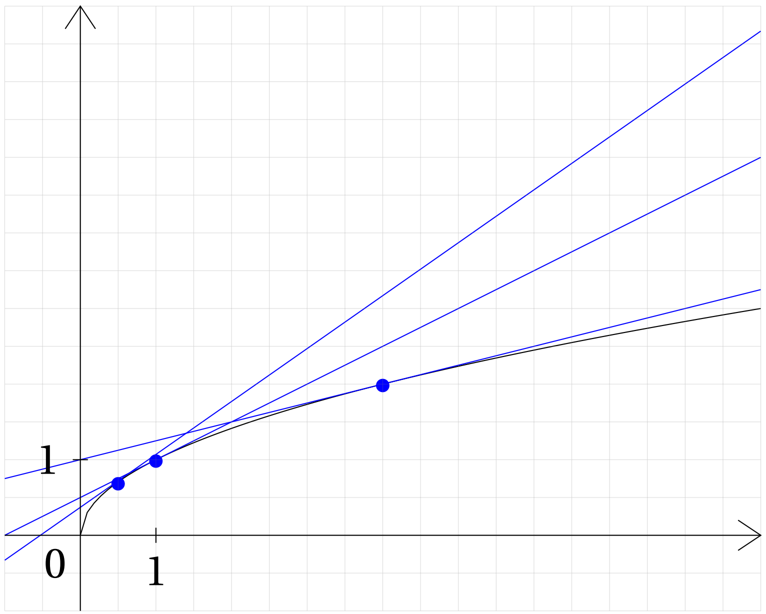
- f est convexe sur I si la courbe $\mathscr{C}_f$ est entièrement située au-dessus de ses tangentes
- f est concave sur I si la courbe $\mathscr{C}_f$ est entièrement située en-dessous de ses tangentes.

Exemples : Grâce à la définition, il est facile de repérer graphiquement la convexité :

La fonction carrée est convexe sur $]-\infty;+\infty[$.



La fonction racine carrée est concave sur $[0;+\infty[$



2) Propriétés

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si sa dérivée f' est décroissante sur I.

Remarques :

- Si une fonction est convexe sur un intervalle I, on observe graphiquement que le coefficient directeur de ses tangentes augmente et inversement, si elle est concave, le coefficient directeur de ses tangentes diminue.
- Si f' est elle-même dérivable sur I et croissante sur I, cela signifie que sa dérivée (appelée « f seconde » et notée f'') est positive sur I.

De cette dernière remarque, nous pouvons déduire la propriété suivante :

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est elle-même dérivable sur I :

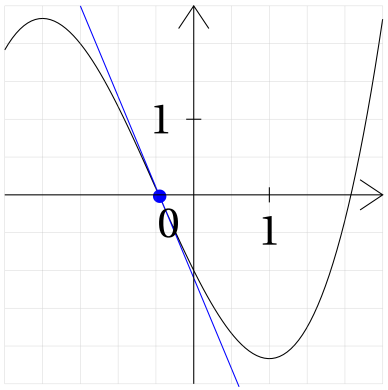
- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Exemple : La fonction carrée $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2x$ qui est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x) = 2$.
Or, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ donc la fonction carrée est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

II - Points d'inflexion

Définition :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, un point d'inflexion est un point où la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente.

Exemple : La courbe ci-contre traverse sa tangente au point de coordonnées (-0,5 ;0).



Ce point est donc un point d'inflexion de la courbe.

Remarques : Une fonction dérivable admet un point d'inflexion quand elle passe de concave à convexe (ou l'inverse).

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est elle-même dérivable sur I, la courbe de f admet un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule et change de signe sur I