Suites arithmético-géométriques - Classe de TES

Document réalisé par S. Bignon

Définition :
On appelle suite arithmético-géométrique une suite (u_n) telle qu'il existe deux nombres réels a et b avec pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Exemple : Le gestionnaire d'une salle de spectacles constate que chaque année, 60 % des abonnés de l'année précédente se réabonnent et qu'il y a 240 nouveaux abonnés. Le nombre d'abonnés en 2015 était de 850.
On peut alors définir une suite (u_n) correspondant au nombre d'abonnés l'année $2015 + n$ par :
$u_0 = 850$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 240$
La suite (u_n) est donc une suite arithmético-géométrique.
Considérons alors la suite (v_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 600$.
Nous pouvons alors montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6. En effet, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 600 \\
v_{n+1} &= 0{,}6u_n + 240 - 600 \\
v_{n+1} &= 0{,}6u_n - 360 \\
v_{n+1} &= 0{,}6(u_n - 600) \\
v_{n+1} &= 0{,}6v_n
\end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = u_0 - 600 = 250$.
De plus $0 < 0{,}6 < 01$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = v_n + 600$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 600$.