Lois à densité - Classe de TES

Document réalisé par S. Bignon

I - Définition

Définition :
Lorsqu'une variable aléatoire ne prend pas qu'un nombre fini de valeurs mais prend toutes les valeurs d'un intervalle I, sa loi de probabilité est dite continue.

Exemple : Soit X la variable aléatoire qui à un élève associe le temps mis pour venir au lycée le matin, cette variable peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0;+\infty[$. Il s'agit donc d'une variable aléatoire dont la loi de probabilité est continue.

Définition :
Dans le cas d'une variable aléatoire X continue, celle-ci ne peut pas être définie par une liste de probabilités, elle est alors caractérisée par une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1. Cette fonction est appelée fonction de densité.

Pour tout intervalle $[a;b]$ de I, on a : $P(X \in [a;b]) = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi à densité f sur un intervalle $[a;b]$ alors :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$$

Document réalisé par S. Bignon

Exemple : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x)=\dfrac{1}{4}x$ et sur $[2;4]$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{4}x$.
Vérifions que la fonction f est une fonction de densité sur $[0;4]$.

- La fonction f est positive sur $[0;4]$.
- Elle est continue sur $[0;2]$ et sur $[2;4]$ et puisque $\dfrac{1}{4}\times 2 = 1-\dfrac{1}{4}\times 2=\dfrac{1}{2}$, elle est également continue en 2.
- Enfin :

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}(2^2-0^2)+4-2-\frac{1}{8}(4^2-2^2)=1$$

f est donc bien une fonction de densité sur $[0;4]$
On a, par exemple :

$$P(2\leqslant X\leqslant 4)=\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=0{,}5$$

II - Loi uniforme

Définition :
On appelle loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a;b]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ alors :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

Preuve :

$$E(X)=\int_a^b x\times\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\times\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

Exemple : Chaque matin, Justine arrive au lycée à n'importe quelle heure entre 8h10 et 8h25.
La variable aléatoire X qui donne le nombre de minutes écoulées depuis 8h10 à l'arrivée de Justine au lycée suit une loi uniforme sur $[0;15]$ dont la fonction de densité est définie par $f(x)=\dfrac{1}{15}$.
La probabilité qu'elle arrive entre 8h20 et 8h25 est :

$$\int_{10}^{15}\frac{1}{15}\mathrm{d}x=\frac{1}{15}(15-10)=\frac{1}{3}$$