Propriétés des intégrales - Classe de TES

Document réalisé par S. Bignon

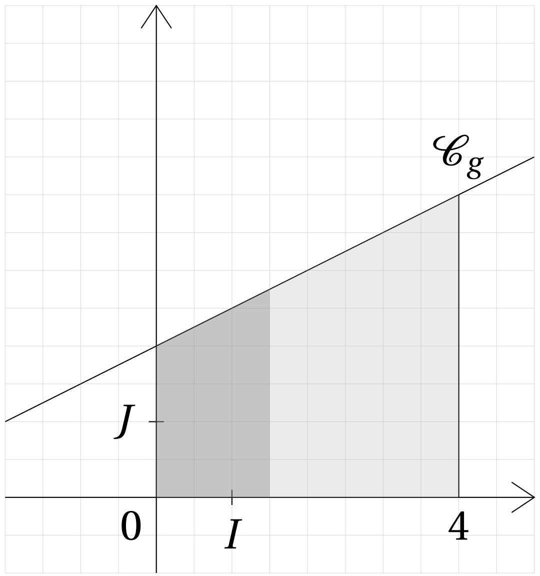
I - Propriétés

1) Relation de Chasles

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et c un réel appartenant à $[a;b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple : On a : $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2}x+2\mathrm{d}x = \int_0^{1,5} \frac{1}{2}x+2\mathrm{d}x + \int_{1,5}^4 \frac{1}{2}x+2\mathrm{d}x$



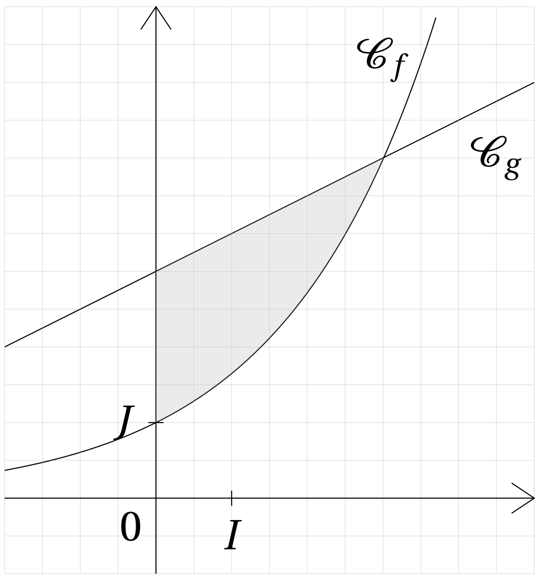
2) Linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, on a :

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)+g(x)\mathrm{d}x$
- $\alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x$ pour tout réel α

Exemple : Calcul de l'aire entre deux portions de courbes

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = e^{0.5x}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.



Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ et ont pour primitives respectives : $F(x) = 2e^{0,5x}$ et $G(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x$.

L'aire comprise entre les deux courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[0;3]$ se calcule de la manière suivante :

$$\int_0^3 g(x) - f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = G(3) - G(0) - (F(3) - F(0)) \approx 4{,}29 u.a.$$

Document réalisé par S. Bignon

3) Signe

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, on a :

- si $f(x) \leqslant g(x)$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- si $f(x) \geqslant 0$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on avait $g(x) \geqslant f(x)$ sur l'intervalle $[0;3]$ et nous avons trouvé que $\displaystyle\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Cette égalité est bien équivalente à $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

II - Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a \neq b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque : Cette définition s'interprète en terme d'aire. En effet, l'aire sous la courbe de f est égale à l'aire du rectangle de côtés de longueurs $b-a$ et m.