# Les matrices - Classe de TES Spécialité



Document réalisé par S. Bignon

# I - Généralités

**Définitions :**

Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombres appelés cœfficients formé de $m$ lignes et $n$ colonnes.

Elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

***Exemple :*** $A = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension $2 \times 3$.

**Définitions :**

- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée matrice carrée d'ordre n.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée matrice colonne.
- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée matrice ligne.

***Exemples :*** $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2.

$C = \begin{pmatrix} 56 & 62 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de dimension $1 \times 2$.

**Définition :**

Deux matrices sont dites égales si et seulement si elles ont la même taille et ont les mêmes coefficients placés aux mêmes positions.

# II - Opérations

## 1) Sommes de matrices

**Définition :**
La somme de deux matrices $A$ et $B$ de **même taille** est la matrice notée $A+B$ dont les coefficients sont obtenus en additionnant les cœfficients de même position de $A$ et de $B$.

***Exemple :*** $P_1 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 90 & 0 \\ 140 & 180 & 240 \end{pmatrix}$$

**Propriétés :** Soit $A$, $B$ et $C$ trois matrices de même dimension :

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$

## 2) Multiplication par un réel

**Définition :**

Soit une matrice $A$ et un réel $k$, le produit de $A$ par le réel $k$ est la matrice notée $kA$ dont les cœfficients sont obtenus en multipliant tous les cœfficients de $A$ par $k$.

***Exemple :*** $P_3 = 1{,}1 \times P_2 = 1{,}1 \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 55 & 0 \\ 77 & 99 & 132 \end{pmatrix}$

**Propriétés :** Soient $A$ et $B$ deux matrices de même taille et $k$ et $k'$ deux nombres réels :

- $(k+k')A = kA + k'A$
- $k(A+B) = kA + kB$
- $(kk')A = k(k'A)$

## 3) Produit de matrices

**Définition :**

Soit $A$ une matrice de taille $m \times p$ et $B$ une matrice colonne à $p$ lignes.

Le produit de $A$ par $B$ est défini par :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b2 + \dots + a_{1p} \times b_p \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b2 + \dots + a_{2p} \times b_p \\ \dots \\ a_{m1} \times b_1 + a_{m2} \times b2 + \dots + a_{mp} \times b_p \end{pmatrix}$$

***Exemple :*** $P_2 \times C = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \times 25 + 50 \times 28 + 0 \times 30 \\ 70 \times 25 + 90 \times 28 + 120 \times 30 \end{pmatrix}$

**Définition :**

Le produit d'une matrice $A$ de dimension $m \times p$ par une matrice $B$ de dimension $p \times n$ est une matrice de dimension $m \times n$ tel que l'élément placé en ligne $k$ et colonne $j$ est le produit de la ligne $k$ de la matrice $A$ par la colonne $j$ de la matrice $B$.

***Exemple :*** $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \times 60 + 0{,}4 \times 70 & 0{,}2 \times 50 + 0{,}4 \times 90 & 0{,}2 \times 0 + 0{,}4 \times 120 \\ 0{,}8 \times 60 + 0{,}6 \times 70 & 0{,}8 \times 50 + 0{,}6 \times 90 & 0{,}8 \times 0 + 0{,}6 \times 120 \end{pmatrix}$

# III - Matrice inverse

## 1) Matrice identité

**Définition :**
On appelle matrice identité d'ordre $n$ la matrice carrée d'ordre $n$ composée de $O$ sauf sur la diagonale qui elle est composée de 1.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Propriété :** Pour toute matrice carrée d'ordre $n$ $A$, on a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

## 2) Matrice inverse

**Définitions :**

Une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ est dite inversible s'il existe une matrice carrée $B$ d'ordre $n$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

où $I_n$ est la matrice identité d'ordre $n$.

Dans ce cas, la matrice $B$ est appelée matrice inverse de la matrice $A$ et est notée $A^{-1}$.

***Exemple :*** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculons l'inverse de $A$.

Notons $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a : $A \times A^{-1} = I_2$ c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc : $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cela nous permet alors d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} 2c = 1 \\ 2d = 0 \\ a+2c = 0 \\ b+2d = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

## 3) Application à la résolution d'un système linéaire

**Propriété :** Un système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où :

- $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ contenant les cœfficients du système,
- $X$ est la matrice colonne à $n$ lignes contenant les inconnues,
- $B$ est la matrice colonne à $n$ lignes contenant les seconds membres.

Dans ce cas, si la matrice inverse de la matrice $A$ existe, on a :

$$X = A^{-1}B$$

***Exemple :*** Le système $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ se traduit par : $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

On en déduit alors que $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le système a donc pour solution le couple $(7;3)$.