Les graphes probabilistes - Classe de TES Spécialité

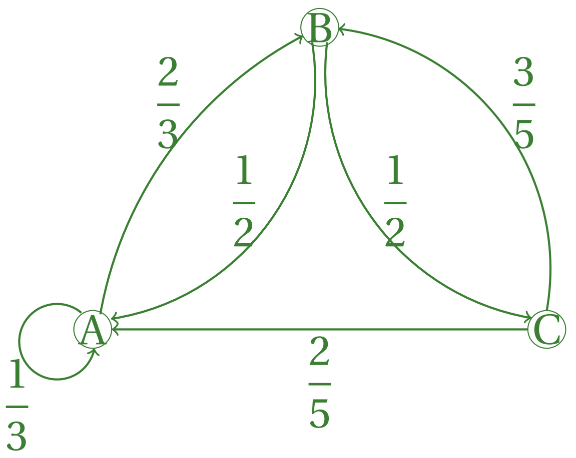
Document réalisé par S. Bignon

I - Graphes probabilistes

Définitions :

On appelle graphe probabiliste un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Exemple : Le graphe ci-dessous est un graphe probabiliste :



 Document réalisé par S. Bignon

II - Matrice de transition et état probabiliste

Définition :
On appelle matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n la matrice A dont chaque coefficient a_{ij} ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) est égal au poids de l'arc reliant le sommet i au sommet j.

Remarque : La somme des coefficients de chaque ligne d'une matrice de transition est égale à 1

Exemple : Pour le graphe précédent, on obtient la matrice de transition : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$

Définition :
L'état probabiliste après n étapes est la matrice ligne notée P_n dont les coefficients représentent les probabilités d'arrivées après n étapes.

Propriété : Soit G un graphe probabiliste dont la matrice de transition est A et dont l'état probabiliste après n étapes est Pn alors $P_{n+1} = P_n \times A$

Remarque : Par conséquent, on aura pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_0 \times A^n$ (P_0 est l'état initial).

Exemple : Considérons de nouveau notre exemple précédent dont la matrice de transition est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'état initial (on part du sommet B).
On aura alors $P_1 = P_0 \times A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Calculons alors l'état probabiliste après 5 étapes :

$$P_5 = P_0 \times A^5 \approx \begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}34 & 0{,}24 \end{pmatrix}$$

La probabilité que nous nous trouvions au sommet C après 5 étapes est donc d'environ 0,24.

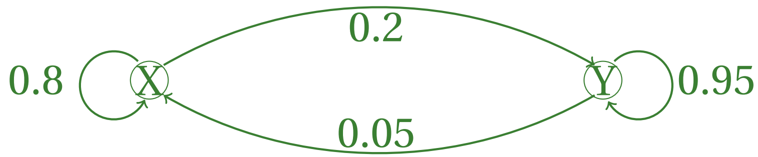
III - État stable

Définition :
Un état probabiliste P est dit stable lorsqu'il n'évolue pas lors de répétitions de l'expérience. On aura alors $P = P \times A$ (ou A est la matrice de transition).

Propriété : Dans tout graphe probabiliste G dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état probabiliste P_n tend vers un état stable P qui est indépendant de l'état initial P_0.

Exemple : Chaque année, 20 % de la population d'une ville X migre vers une ville Y et 5 % de la population de la ville Y migre vers la ville X . On suppose que ces migrations sont les seuls facteurs influant sur les populations des deux villes.

La situation peut donc être modélisée par le graphe probabiliste suivant :



La matrice de transition associée à ce graphe est $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

Considérons un état initial $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (un habitant habitant la ville X).

Au bout d'un an, l'état probabiliste est : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

En effectuant quelques simulations, on s'aperçoit que l'état probabiliste tend vers un état stable $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

On en déduit que quelque soit la ville d'origine d'un habitant, la probabilité qu'il habite à terme la ville X est de 20 % et celle qu'il habite la ville Y est de 80 %.